Correction Devoir maison n°10

Exercice 1 - Obligatoire pour les groupes 8 à 11

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{x}{\ln(1+x)} & \text{si } x \in]0;+\infty[\end{cases}$$

ainsi que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = e \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$$

1. On a pour tout $x \in]0;+\infty[$, $x > 0$ et $\ln(1+x) > 0$ donc le quotient est positif et

$$\boxed{\forall x \in [0;+\infty[, \quad f(x) \geq 0.}$$

Donc par récurrence $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = f(u_{n-1}) \geq 0$.

$$\boxed{\text{Pour tout entier } n,\ u_n \text{ existe.}}$$

2. On écrit un programme Scilab permettant de calculer u_N.

```
u = %e
n = input("Donnez un entier n")

for k=1:n
    if u == 0 then
        u = 1
    else
        u = u /log(1+u)
    end
end
disp(u)
```

3. La fonction $x \to \ln(1+x)$ est continue sur $]0;+\infty[$ car $1+x > 0$

   La fonction $x \to x$ est continue sur $]0;+\infty[$

   La fonction f est continue sur $]0;+\infty[$ est continue en tant que quotient de fonctions continues.

   On étudie la continuité en 0. On calcule

$$\lim_{\substack{x\to 0\\>}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\>}} \frac{x}{\ln(1+x)} = \lim_{\substack{x\to 0\\>}} \frac{1}{\dfrac{\ln(1+x)}{x}} = 1$$

(On reconnait un taux d'accroissement). Ainsi la fonction est continue en 0.

$$\boxed{\text{Montrer que } f \text{ est continue sur } [0;+\infty[.}$$

4. La fonction $x \to \ln(1+x)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $]0;+\infty[$ car $1+x > 0$

   La fonction $x \to x$ est $\mathcal{C}^1$ sur $]0;+\infty[$

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est } \mathcal{C}^1 \text{ sur }]0;+\infty[\text{ en tant que quotient de fonctions } \mathcal{C}^1.}$$

5. Soit $x \geq e-1$. On a alors

$$\begin{aligned} f(x) \leq x &\iff \frac{x}{\ln(1+x)} - x \leq 0 \\ &\iff \frac{x - x\ln(1+x)}{\ln(1+x)} \leq 0 \\ &\iff \frac{x(1-\ln(1+x))}{\ln(1+x)} \leq 0 \end{aligned}$$

Or $\ln(1+x) \geq 1$ donc $1-\ln(1+x) \leq 0$, $x > 0$ et $\ln(1+x) > 0$.

$$\boxed{\text{Donc } f(x) \leq x.}$$

De la même façon,

$$(x+1)\ln(x+1) \geq (x+1) \iff (x+1)(\ln(x+1)-1) \geq 0$$

Or $\ln(x+1)-1 \geq 0$ et $x+1 \geq 0$ ainsi

$$\boxed{(x+1)\ln(x+1) \geq (x+1)}$$

La fonction f est dérivable sur $[e+1;+\infty[$. (montré à la question 4) et

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\ln(1+x) - \dfrac{x}{1+x}}{(\ln(x+1))^2} \\ &= \frac{\ln(1+x)(1+x)-x}{(1+x)(\ln(x+1))^2} \end{aligned}$$

Or d'après le résultat précédent, $\ln(1+x)(1+x) - x \geq 1$. Donc

$$\boxed{\forall x \geqslant e-1, \quad f'(x) \geqslant 0.}$$

6. Nous montrons par récurrence les propositions $\mathscr{P}_n : \{\forall n \in \mathbb{N}, \quad e-1 \leqslant u_n\}$
   - **Initialisation :** On a $u_0 = e \geq e-1$. Donc la proposition $\mathscr{P}_0$ est vraie.
   - **Hérédité :** On suppose que la proposition $\mathscr{P}_n$ est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$. De plus, rappelons que la fonction f est croissante sur $[e-1;+\infty[$. Ainsi

   $$\begin{aligned} e-1 \leq u_n &\iff f(e-1) \leq f(u_n) \\ &\iff e-1 \leq u_{n+1} \end{aligned}$$

   La proposition $\mathscr{P}_{n+1}$ est donc vraie
   - **Conclusion :** $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq e-1}$

7. On s'intéresse à la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Comme $u_n \neq 0$, on calcule

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{\ln(1+u_n)}$$

Or $u_n \geq e-1 \implies \ln(1+u_n) \geq 1$ ainsi $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$ La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante. Elle est également minorée par $e-1$.

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est donc convergente.}}$$

Notons, ℓ la limite de la suite (u_n). On a nécessairement

$$\begin{aligned}\ell = f(\ell) &\iff \ell = \frac{\ell}{\ln(1+\ell)}\\ &\iff \frac{\ln(1+\ell)\ell - \ell}{\ln(1+\ell)} = 0\\ &\iff \frac{\ell(\ln(1+\ell)-1)}{\ln(1+\ell)} = 0\end{aligned}$$

Ainsi, deux solutions sont possibles, $\ell = 0$ ou $\ln(1+\ell) - 1 = 0 \iff \ell = e-1$. Or $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq e-1$, donc

$$\boxed{\text{La limite de la suite } (u_n) \text{ est } e-1.}$$

Exercice 2 - Obligatoire pour les groupes 7 à 11

On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie pour tout entier n strictement positif par :

$$u_n = \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x}dx$$

1. On a

$$u_1 = \int_0^1 \frac{1}{1+x}dx = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln(2)$$

$$\boxed{\text{Donc } u_1 = \ln(2).}$$

2. On a pour $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}x^{n-1} > 0 &\Longrightarrow \frac{x^{n-1}}{1+x} > 0\\ &\Longrightarrow \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x}dx > 0\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Donc pour } n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \text{ est positive.}}$$

3. On calcule

$$\begin{aligned}u_{n+1} - u_n &= \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx - \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x}dx\\ &= \int_0^1 \frac{x^n - x^{n-1}}{1+x}dx\\ &= \int_0^1 \frac{x^{n-1}(x-1)}{1+x}dx\end{aligned}$$

Pour $x \in [0,1]$, on a $x^{n-1} > 0$, $1+x > 0$ et $x-1 < 0$. Ainsi,

$$u_{n+1} - u_n < 0$$

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est décroissante.}}$$

4. Pour tout entier n strictement positif,

$$\begin{aligned} u_{n+1} + u_n &= \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx - \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x}dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^n + x^{n-1}}{1+x}dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^{n-1}(1+x)}{1+x}dx \\ &= \int_0^1 x^{n-1}dx \\ &= \left[\frac{x^n}{n}\right]_0^1 = \frac{1}{n} - 0. \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{D'où la relation } u_{n+1} + u_n = \frac{1}{n}.}$$

5. On a donc la relation suivante $u_{n+1} = \dfrac{1}{n} - u_n$

```
n = input("Donnez un entier n")
u = log(2)
for k = 1:n-1
    u = 1/k - u
end
dips(u)
```

6. La suite (u_n) est décroissante donc

$$\begin{aligned} u_{n+1} \leq u_n &\Longleftrightarrow u_{n+1} + u_n \leq u_n + u_n \\ &\Longleftrightarrow \frac{1}{n} \leq 2u_n \end{aligned}$$

De même, en écrivant l'égalité de la question 4 pour $n-1$ on a $u_n + u_{n-1} = \dfrac{1}{n-1}$ et

$$\begin{aligned} u_n \leq u_{n-1} &\Longleftrightarrow u_n + u_n \leq u_{n-1} + u_n \\ &\Longleftrightarrow 2u_n \leq \frac{1}{n-1} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement, pour tout entier } n \text{ supérieur ou égal à 2, } \frac{1}{n} \leq 2u_n \leq \frac{1}{n-1}}$$

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n-1} = 0$, donc d'après le théorème des gendarmes,

$$\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est convergente et } \lim_{n\to+\infty} u_n = 0.}$$

7. En utilisant l'inégalité précédente,

$$\frac{1}{n} \leq 2u_n \leq \frac{1}{n-1} \Longleftrightarrow \frac{1}{2} \leq nu_n \leq \frac{n}{2(n-1)}$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{2(n-1)} = \dfrac{1}{2}$. En utilisant encore une fois le théorème des gendarmes, on a

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} nu_n = \frac{1}{2}.}$$

Exercice 3 - Obligatoire pour les groupes 1 à 6

On considère, pour tout entier naturel n, l'application φ_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi_n(x) = (1-x)^n e^{-2x}$$

ainsi que l'intégrale :

$$I_n = \int_0^1 \varphi_n(x)\ dx$$

On se propose de démontrer l'existence de trois réels, a, b, c tels que :

$$I_n = a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2} + \frac{1}{n^2}\varepsilon(n) \quad \text{avec} \quad \lim_{n\to+\infty} \varepsilon(n) = 0$$

1. La fonction $\varphi_0 : x \to e^{-2x}$ est une fonction continue sur $[0;1]$ en tant que composée de fonction continue. L'intégrale I_0 existe et

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_0^1 e^{-2x} dx \\ &= \left[\frac{-1}{2} e^{-2x}\right]_0^1 \\ &= \frac{-1}{2} e^{-2} + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Donc } I_0 = \frac{1-e^{-2}}{2}.}$$

La fonction $\varphi_1 : x \to (1-x)e^{-2x}$ est une fonction continue sur $[0;1]$ en tant que composée et produite de fonctions continues. L'intégrale I_1 existe et

$$I_1 = \int_0^1 (1-x)e^{-2x}$$

On pose les fonctions

$$\begin{aligned} u(x) &= 1-x \qquad v'(x) = e^{-2x} \\ u'(x) &= -1 \qquad v(x) = -\frac{1}{2} e^{-2x} \end{aligned}$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$. A l'aide d'une intégration par partie, on obtient

$$\begin{aligned} I_1 &= \left[-\frac{(1-x)}{2} e^{-2x}\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 e^{-2x} dx \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left[\frac{-1}{2} e^{-2x}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{-e^{-2}}{2} + \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{e^{-2}}{4} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On obtient } I_1 = \frac{1+e^{-2}}{4}.}$$

2. Pour $x \in [0,1]$, on a $1-x \in [0,1]$ et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} & (1-x)^n \geq (1-x)^{n+1} \\ \Longrightarrow\ & (1-x)^n e^{-2x} \geq (1-x)^{n+1} e^{-2x} \\ \Longrightarrow\ & \int_0^1 (1-x)^n e^{-2x} dx \geq \int_0^1 (1-x)^{n+1} e^{-2x} dx \\ \Longrightarrow\ & I_n \geq I_{n+1} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La suite } (I_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante}}$$

3. Pour tout $x \in [0,1]$, pour tout entier n,

$$\begin{aligned} (1-x)^n \geq 0 & \Longrightarrow (1-x)^n e^{-2x} \geq 0 \\ & \Longrightarrow \int_0^1 (1-x)^n e^{-2x} dx \geq 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } \forall n \in \mathbb{N}, I_n \geq 0.}$$

4. La suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0.

$$\boxed{\text{Donc la suite } (I_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est convergente.}}$$

5. On a

$$\boxed{\forall x \in [0,1],\ e^{-2x} \leq 1.}$$

6. D'après ce qui précède, on a

$$\begin{aligned} & (1-x)^n e^{-2x} \leq (1-x)^n \\ \Longrightarrow\ & \int_0^1 (1-x)^n e^{-2x} dx \leq \int_0^1 (1-x)^n dx \\ \Longrightarrow\ & I_n \leq \left[\frac{-1}{n+1}(1-x)^{n+1}\right]_0^1 \\ \Longrightarrow\ & I_n \leq 0 - \frac{-1}{n+1} \end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq I_n \leq \tfrac{1}{n+1}}$$

7. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$, d'après le théorème des gendarmes,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n = 0.}$$

8. La fonction φ_{n+1} est continue sur $[0,1]$ en tant que composée et produit de fonctions continues. L'intégrale existe et

$$2I_{n+1} = \int_0^1 (1-x)^{n+1} \times 2e^{-2x} dx$$

On définit

$$u(x) = (1-x)^{n+1} \qquad v'(x) = 2e^{-2x}$$
$$u'(x) = -(n+1)(1-x)^n \quad v(x) = -e^{-2x}$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$. A l'aide d'une intégration par partie, on obtient

$$\begin{aligned} 2I_{n+1} &= \left[-(1-x)^{n+1}e^{-2x}\right]_0^1 - \int_0^1 (n+1)(1-x)^n e^{-2x}dx \\ &= 0 - (-(1)^{n+1}e^0) - (n+1)\int_0^1 (1-x)^n e^{-2x}dx \end{aligned}$$

c'est-à-dire,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad 2I_{n+1} = 1 - (n+1)\, I_n}$$

9. D'après l'égalité précédente, on a

$$2I_{n+1} = 1 - nI_n - I_n \Longleftrightarrow nI_n = 1 - I_n - 2I_{n+1}$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = \lim\limits_{n\to+\infty} I_{n+1} = 0$ donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} nI_n = 1.}$$

10. Toujours en utilisant l'égalité précédente, on a

$$\begin{aligned} & nI_n - 1 = -I_n - 2I_{n+1} \\ \Longleftrightarrow \quad & n\,(nI_n - 1) = -nI_n - 2nI_{n+1} \\ \Longleftrightarrow \quad & n\,(nI_n - 1) = -nI_n - 2(n+1)I_{n+1} + 2I_{n+1} \end{aligned}$$

Or d'après les questions précédentes, $\lim\limits_{n\to+\infty} I_{n+1} = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+1)I_{n+1} = 1$. Ainsi,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} n\,(nI_n - 1) = -3.}$$

11. En reprenant la relation

$$I_n = a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2} + \frac{1}{n^2}\varepsilon\,(n) \quad \text{avec} \quad \lim_{n\to+\infty} \varepsilon\,(n) = 0$$

On remarque que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = a = 0$ et donc

$$\boxed{a = 0.}$$

En multipliant l'expression par n et en remplaçant a par 0, on obtient

$$nI_n = b + \frac{c}{n} + \frac{1}{n}\varepsilon\,(n) \quad \text{avec} \quad \lim_{n\to+\infty} \varepsilon\,(n) = 0$$

On remarque alors que $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n = b = 1$ et donc

$$\boxed{b = 1.}$$

Enfin, en soustrayant 1 et en multipliant par n dans la relation pour I_n, on a

$$n\,(I_n - 1) = c + \varepsilon\,(n) \quad \text{avec} \quad \lim_{n\to+\infty} \varepsilon\,(n) = 0$$

On remarque alors que $\lim\limits_{n\to+\infty} n\,(I_n - 1) = c = -3$ et donc

$$\boxed{c = -3.}$$

En conclusion,

$$\boxed{I_n = \tfrac{1}{n} - \tfrac{3}{n^2} + \tfrac{1}{n^2}\varepsilon\,(n) \quad \text{avec} \quad \lim_{n\to+\infty} \varepsilon\,(n) = 0}$$

Exercice 4 - Obligatoire pour les groupes 3 à 11

1. (a) La fonction $t \mapsto \dfrac{e^t}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ (par quotient de fonctions usuelles avec un dénominateur ne s'annulant pas). D'après le Théorème fondamental de l'analyse, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x > 0$, on a :
$$\boxed{f'(x) = \frac{e^x}{x}}$$
   (b) $\boxed{f(1) = 0.}$
   (c) Soit $x \in [1, +\infty[$. Pour tout $t \in [1, x]$, on a $e^t \geq e$ (croissance de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$) et ainsi puisque $t > 0$:
$$\frac{e^t}{t} \geq \frac{e}{t}$$
   Les bornes étant dans le bon sens ($1 \leq x$) et les fonctions continues, on a par croissance et linéarité :
$$\int_1^x \frac{e^t}{t}\,dt \geq \int_1^x \frac{e}{t}\,dt = e\int_1^x \frac{1}{t}\,dt$$
   On a donc :
$$f(x) \geq e\Big[\ln(|t|)\Big]_1^x = e\ln(x)$$
   $\boxed{\text{Conclusion : pour tout } x \geq 1,\ f(x) \geq e\ln(x).}$
   (d) On a $\lim\limits_{x\to+\infty} e\ln(x) = +\infty$. D'après la question précédente et par comparaison, on a :
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$
2. On a $\lim\limits_{x\to 0^+} e^x\ln(x) = -\infty$ (par produit). D'après l'inégalité admise et par comparaison, on a :
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$
3. On a le tableau de variation suivant :

x	0 $\qquad$ $+\infty$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

4. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on souhaite montrer l'existence d'un entier réel u_n tel que $\displaystyle\int_1^{u_n} \frac{e^t}{t}\,dt = n$, ce qui est équivalent à $f(u_n) = n$ car un tel réel u_n est nécessairement strictement positif sinon l'intégrale est négative car l'intégrande est positive et les bornes dans le mauvais sens.

   On sait que :

   — La fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

   — La fonction f est strictement croissante car pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{e^x}{x} > 0$.

   — $n \in]-\infty, +\infty[= \Big]\lim\limits_{x\to0^+} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\Big[$.

D'après le corollaire du Théorème de bijection, il existe un unique réel u_n strictement positif (et donc un unique réel d'après la remarque faite précédemment) tel que $f(u_n) = n$.

$\boxed{\text{Conclusion : pour tout } n \geq 0, \text{ il existe un unique réel } u_n \text{ tel que } \int_1^{u_n} \frac{e^t}{t}\,dt = n.}$

(b) Soit $n \geq 0$. Par définition, $f(u_{n+1}) = n+1$ et $f(u_n) = n$ donc $f(u_{n+1}) \geq f(u_n)$ et sachant que f est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit que $u_{n+1} \geq u_n$.

$\boxed{\text{Conclusion : } (u_n)_{n\geq 0} \text{ est croissante.}}$

(c) La suite est croissante donc elle converge ou alors elle diverge vers $+\infty$. Supposons qu'elle converge vers un réel ℓ. Ce réel est supérieur ou égal à 1 car $u_1 = 1$ (conséquence de 1.b)). On sait que pour tout $n \geq 0$, $f(u_n) = n$. Or par continuité de f sur $\mathbb{R}_+^*$,

$$\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\ell) \in \mathbb{R}$$

mais $\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = \lim_{n\to+\infty} n = +\infty$. C'est absurde.

$\boxed{\text{Conclusion : la suite diverge vers } +\infty.}$

Exercice 5 - Obligatoire pour les groupes 1 à 7

On considère la fonction définie par $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$.

1. (a) La fonction $t \to \dfrac{1}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\text{La fonction } F \text{ est donc définie sur } \mathbb{R}.}$$

De plus

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \frac{1}{1+t^2} > 0$$

donc

$$\boxed{F \text{ est positive pour } x > 0 \text{ et négative pour } x < 0.}$$

(b) Tout d'abord, le domaine de définition de F est bien symétrique. On étudie

$$F(-x) = \int_0^{-x} \frac{dt}{1+t^2}$$

On pose le changement de variable $u = -t$ ($du = -dt$), on a alors

$$F(-x) = \int_0^x \frac{-du}{1+(-u)^2} = -\int_0^x \frac{du}{1+u^2} = -F(x).$$

$$\boxed{\text{La fonction } F \text{ est impaire.}}$$

(c) La fonction $t \to \dfrac{1}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\text{La fonction } F \text{ est donc de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F'(x) = \frac{1}{1+x^2} > 0$$

$$\boxed{\text{La fonction } F \text{ est strictement croissante.}}$$

2. (a) Soit $t \in \mathbb{R}^+$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+t^2} \leq \frac{2}{(1+t)^2} &\iff \frac{1}{1+t^2} - \frac{2}{(1+t)^2} \leq 0 \\
&\iff \frac{(1+t)^2 - 2 - 2t^2}{(1+t^2)(1+t)^2} \leq 0 \\
&\iff \frac{1+2t+t^2-2-2t^2}{(1+t^2)(1+t)^2} \leq 0 \\
&\iff \frac{-1+2t-t^2}{(1+t^2)(1+t)^2} \leq 0 \\
&\iff \frac{-(1-t)^2}{(1+t^2)(1+t)^2} \leq 0
\end{aligned}$$

Cette dernière inégalité étant toujours vérifié (et comme on a raisonné par équivalence, on a)

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}^+,\ \frac{1}{1+t^2} \leq \frac{2}{(1+t)^2}}$$

D'après l'inégalité précédente,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+t^2} \leq \frac{2}{(1+t)^2} &\Longrightarrow \int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt \leq \int_0^x \frac{2}{(1+t)^2}dt \\
&\Longrightarrow F(x) \leq \left[\frac{-2}{1+t}\right]_0^x \\
&\Longrightarrow F(x) \leq \frac{-2}{1+x} - (-2) \\
&\Longrightarrow F(x) \leq 2 - \frac{2}{1+x} \leq 2
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a bien } \forall x \in \mathbb{R}^+, F(x) \leq 2.}$$

(b) La fonction F est strictement croissante et elle est majorée par 2.

$$\boxed{\text{Elle admet donc une limite finie } L \text{ en } +\infty \text{ et } L \leq 2.}$$

3. De la même façon

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{(1+t)^2} &= \frac{(1+t)^2 - (1+t^2)}{(1+t^2)(1+t)^2} \\
&= \frac{1+2t+t^2-1-t^2}{(1+t^2)(1+t)^2} \\
&= \frac{2t}{(1+t^2)(1+t)^2} > 0
\end{aligned}$$

Ainsi on a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+t^2} \geq \frac{1}{(1+t)^2} \Longrightarrow \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} &\geq \int_0^x \frac{dt}{(1+t)^2} \\
F(x) &\geq \left[\frac{-1}{1+t}\right]_0^x \\
F(x) &\geq \frac{-1}{1+x} - (-1) \\
F(x) &\geq 1 - \frac{1}{1+x}
\end{aligned}$$

Donc
$$\lim_{x\to+\infty} F(x) \geq \lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{1+x}\right)$$
c'est à dire,
$$\boxed{L := \lim_{x\to+\infty} F(x) \geq 1.}$$

4. On sait que
   — La fonction F est continue sur $[0,+\infty[$ (elle est de classe $\mathcal{C}^1$)
   — La fonction F est strictement croissante sur $[0,+\infty[$.
   — $F(0)=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \geq 1$.

   Donc, d'après le théorème de la bijection,
$$\boxed{\text{L'équation } F(x)=\frac{1}{2} \text{ admet une et une seule solution sur } [0,+\infty[.}$$

5. On pose $G(x)=F(x)+F\left(\frac{1}{x}\right)$.
   (a) On sait que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et la fonction $x\to\frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Par composée de fonctions dérivables
$$\boxed{G \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}_+^*.}$$
   On a alors
$$\begin{aligned} G'(x) &= F'(x)-\frac{1}{x^2}F'\left(\frac{1}{x}\right)\\ &= \frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{x^2}\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\\ &= \frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+x^2}\end{aligned}$$
$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\quad G'(x)=0}$$
   (b) La dérivée de G est nulle sur $\mathbb{R}_+^*$. La fonction G est donc constante. Par exemple en choisissant $x=1$, on a
$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\quad G(x)=G(1)=2F(1)}$$
   (c) On a alors $\lim\limits_{x\to+\infty} G(x)=2F(1)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=L$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} F\left(\frac{1}{x}\right)=F(0)=0$. Ainsi
$$\boxed{L=2F(1).}$$

Exercice 6 - Obligatoire pour les groupes 1 et 2

1. Soit x un réel strictement positif.
   On pose pour tout entier naturel n :
$$S_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+x+1}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}+\dots$$

On se propose d'étudier la limite $S(x)$ de $S_n(x)$ lorsque $n \to +\infty$.
Pour tout entier naturel n on pose :

$$f_p(t) = \frac{t^{x+p}}{1+t} \text{ si } 0 < t \leq 1,\ f_p(0) = 0$$

et $I_p(x) = \int_0^1 f_p(t)dt$.

2. On vérifie que la fonctin f_p est continue par morceaux sur$[0,1]$:
$t^{x+p} = e^{(x+p)\ln(x)} \to 0$ quand $x \to 0^+$ car $x+p>0$
Donc f_p est continue en 0 et $I_p\left(x\right)$ est bien définie.
3. Montrer que pour tout t de $[0,1]$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^k &= \sum_{k=0}^{n}(-t)^k = \frac{(-t)^{n+1}-1}{-t-1} = \frac{1}{1+t} + (-1)^{n+1}\frac{t^{n+1}}{1+t}\\ \text{d'où} \quad : \quad \frac{1}{1+t} &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^k + (-1)^{n+1}\frac{t^{n+1}}{1+t}\end{aligned}$$

4. On en déduit en multipliant par t^x que pour tout $x>0$:

$$\frac{t^x}{1+t} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^{k+x} + (-1)^{n+1}\frac{t^{n+x+1}}{1+t}$$

fonctions continues par morceaux sur $[0,1]$ (prolongeables par continuité en 0) que l'on intègre sur $[0,1]$:
Mais la primitive$F\left(t\right) = t^{k+x+1}$ n'est pas définie en $0\ldots$ on la prolonge en 0 par 0. Esr-elle ainsi dérivable en 0 ?
Comme sa dérivée est $\left(k+x+1\right)t^{k+x} \to 0$ car $k+x>0$ alors F est dérivable en 0 et $F'\left(0\right) = 0$
(Ou bien, on calcule $\int_\varepsilon^1$ qui est continue par rapport à ε et on fait tendre ε vers 0)

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{t^x}{1+t}dt &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \int_0^1 t^{k+x}dt + (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{t^{n+x+1}}{1+t}dt\\ &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \left[\frac{t^{k+x+1}}{k+x+1}\right]_0^1 + (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{t^{n+x+1}}{1+t}dt\\ \int_0^1 \frac{t^x}{1+t}dt &= S_n(x) + R_n(x) \text{ où } R_n(x) = (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{t^{n+x+1}}{1+t}dt\end{aligned}$$

5. On majore le contenu pour $t \in [0,1]$ on a $1+t \geq 1$ don $0 \leq \dfrac{1}{t+1} \leq 1$.
6. Et $0 \leq t^{n+x+1} \leq t^{n+1}$ car $t \in [0,1]$ donc la fonction $x \to t^x$ est décroissante. D'où :

$$\frac{t^{n+x+1}}{1+t} \leq t^{n+1}$$

En intégrant l'inégalité $(0 \leq 1)$ on a alors :

$$0 \leq \int_0^1 \frac{t^{n+x+1}}{1+t}dt \leq \int_0^1 t^{n+1}dt$$

$$0 \leq \int_0^1 \frac{t^{n+x+1}}{1+t}dt \leq \frac{1}{n+2}$$

7. Par encadrement
$$(-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{t^{n+x+1}}{1+t}dt \to 0 \text{ quand } n \to +\infty$$
et comme
$$\begin{aligned} S_n(x) &= \int_0^1 \frac{t^x}{1+t}dt - R_n(x) \\ &\to \int_0^1 \frac{t^x}{1+t}dt = S\left(x\right) \end{aligned}$$

8. Etude du cas $x = 1/2$.On a alors
$$S(1/2) = \int_0^1 \frac{t^{1/2}}{1+t}dt$$

9. Le changement de variable $u = t^{1/2}$ n'est pas dérivable en 0, on le retourne en $t = u^2$
D'où $dt \leftrightarrow 2udu$
$$\begin{aligned} S(1/2) &= \int_0^1 \frac{t^{1/2}}{1+t}dt = \int_0^1 \frac{u^{21/2}}{1+u^2}2udu \\ &= 2\int_0^1 \frac{u^2}{1+u^2}du = 2\int_0^1 \frac{u^2+1-1}{1+u^2}du \\ &= 2\int_0^1 1 - \frac{1}{1+u^2}du \\ &= 2 - 2\int_0^1 \frac{1}{1+u^2}du \\ &= 2 - \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

10. On a
$$S\left(1/2\right) = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1/2+1}$$
Or
$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1/2+1} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+3/2} = 2\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+3} \\ &= 2\sum_{h=1}^{n+1} \frac{(-1)^{h-1}}{2h+1} \\ &= -2\sum_{k=0}^{n+1} \frac{(-1)^k}{2k+1} + 2 \end{aligned}$$
Donc
$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(-1)^k}{2k+1} &= \frac{-1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1/2+1} - 2\right) \\ &\to \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$